АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ҚОЛДАНЫСЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

4 қараша 2024
Алматы, Қазақстан

Дәрістің мақсаты – Анықталған интегралдың көмегімен геометриялық фигуралардың ауданын табуды үйрену, кейіннен оны еселі интегралдарды есептеуде қолдану

Негізгі сұрақтар:

1. Анықталған интеграл. Риман интегралдық қосындылары
2. Қисық сызықты трапецияның ауданы

Анықталған интеграл ұғымына келтіретін есептер

1-есеп. Қисық сызықты трапеция ауданы

Жоғарғы жағынан $y = f(x)$, $(f(x) > 0)$ функция графигімен, сол және оң жағынан сәйкес $x = a$, $x = b$ түзулерімен, төменгі жағынан OX өсімен шектелген жазық фигураны қарастырамыз. Осы жазық фигураны *қисық сызықты трапеция* деп атайды. Қисық сызықты трапецияның ауданын табу үшін $[a, b]$ кесіндісін қалауымызша n бөлікке бөлеміз:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Әр бөліктеу нүктелерінен OY өсіне параллель түзулер жүргіземіз. Әр $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндісінен қалауымызша ξ_i нүктесін таңдап алып, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ белгілейміз. Сонда $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ биіктігі $f(\xi_i)$, табаны Δx_i болатын тіктөртбұрыштың ауданын береді.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{1}$$

Қосынды (1) қисық сызықты трапецияның ауданын жуықтайды. Егер $\lambda = \max_i \Delta x_i \to 0$ болғанда $n \to \infty$, және қосындының тиянақты шегі S бар болса, онда ол шек қисық сызықты трапецияның ауданын береді:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{2}$$

2-есеп. Айнымалы күштің жұмысы

Материалдық нүкте OX өсінің бойымен F күшінің әсерімен қозғалсын. Егер F тұрақты болса, онда жұмыс күш пен жүріп өткен жолдың көбейтіндісіне тең. Айнымалы күш $F = F(x)$ үшін $x \in [a, b]$ аралығындағы жұмысын табайық.

$[a, b]$ кесіндісін n бөлікке бөлеміз, әр $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндісінен ξ_i нүктесін аламыз. Егер $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндісіндегі күш тұрақты деп есептесек, онда жұмыстың жуық мәні:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \tag{3}$$

Егер $\lambda = \max_i \Delta x_i \to 0$, және қосындының шегі тәуелсіз болса, онда $F(x)$ айнымалы күшінің $[a, b]$ кесіндісіндегі жұмысы:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} A_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{4}$$

3-есеп. Берілген жылдамдық бойынша жолды табу

Материалдық M нүктесі айнымалы $v = v(t)$ жылдамдықпен түзу сызық бойымен қозғалсын. t_0 уақыттан T уақытқа дейін жүріп өткен жолын табайық.
$[t_0, T]$ аралығын n бөлікке бөлеміз:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{i-1}, t_i], \ldots, [t_{n-1}, T].$$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ және $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ аламыз. Жолдың жуық мәні:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} v(t_i^*) \cdot \Delta t_i. \tag{5}$$

Шекті есепте $\Delta t_i \to 0$, $n \to \infty$ болғанда, толық жол:

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} S_n = \int_{t_0}^{T} v(t)\, dt. \tag{6}$$

Анықталған интеграл ұғымын енгізу

Егер

$$\lambda = \max_i \Delta t_i \to 0, \quad n \to \infty,$$

онда $[t_0, T]$ уақыттағы жүріп өткен жолы:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t_i^*) \cdot \Delta t_i. \tag{7}$$

Айталық $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$, $(a < b)$ кесіндісінде анықталсын. Берілген кесіндіні қалауымызша n бөлікке бөлеміз:

$$\tau = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b).$$

Оны τ *бөліктеу* деп, ал $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нүктелерін τ бөліктеуінің нүктелері деп атайды. Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндіден қалауымызша ξ_i нүктесін таңдап аламыз да,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \lambda = \max_i \Delta x_i.$$

Интегралдық қосынды деп аталатын қосындыны құрамыз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{8}$$

Definition (Анықталған интеграл)

Егер $\lambda \to 0$ болғанда (8) интегралдық қосындысының шекті шегі J бар болып, ол [a, b] кесіндісін бөліктеуден және ξ_i нүктелерін таңдап алудан тәуелсіз болса, онда ол шек $[a, b]$ кесіндісіндегі $f(x)$ функциясының *анықталған интегралы* немесе *Риман интегралы* деп аталады:

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{немесе} \quad (R)\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9}$$

Жоғарыдағы анықтаманы "$\varepsilon - \delta$" тілінде де жазуға болады.

Definition ($\varepsilon - \delta$ анықтамасы)

Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып,

$$\lambda < \delta \implies |\sigma - I| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда J санын σ қосындысының шегі деп атайды. Бұл жағдайда $f(x)$ функциясын $[a, b]$ кесіндісінде *интегралданады* деп атаймыз. Сәйкес a және b сандарын *интегралдың төменгі және жоғарғы шектері*, ал $f(x)$ функциясын *интеграл астындағы функция*, x интегралдау айнымалысы деп атайды.

Анықталған интегралдың анықтамасынан соң жоғарыдағы қарастырған есептерге қайырылсақ, (2) формуладан қисық сызықты трапецияның ауданы:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx,$$

(4) формуладан айнымалы күштің жұмысы:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx,$$

(7) формуладан берілген жылдамдық бойынша жол:

$$S = \int_{t_0}^T v(t)\,dt.$$

Жоғарыдағы анықталған интеграл анықтамасы шектелген функциялар үшін қолданылады. Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде шектелмеген болса, онда [a,b] кесіндісін кез келген бөліктеуде қайсыбір $f(\xi_i)$ мәні шектеусіз болып, интегралдық қосынды σ шексіз үлкен болады, яғни оның шекті шегі болмайды.

Анықталған интегралдың бар болу шарты

Theorem (Анықталған интегралдың бар болуының қажетті шарты)

Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде интегралданса, онда функция берілген кесіндеде шектелген.

Доказательство.

$f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде шектелмеген деп кері жориық. $[a, b]$ кесіндісін қалауымызша n бөлікке бөлгенде, осы бөліктердің ең болмағанда біреуінде $f(x)$ функциясы шектелмеген болады, онда интегралдық қосындыдағы $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ мүшесін абсолюттік шамасы бойынша ең үлкен болатындай етіп, ξ_i нүктесін таңдап алуға болады. Онда сәйкес интегралдық қосындының шекті шегі болмайды. Сонымен, шектелмеген функцияның анықталған интегралы болмайды. □

Ескерту. Теореманың кері тұжырымы орындалмайды. Кесіндіде берілген кез келген шектелген функция интегралданбайды. Мысал ретінде $[0, 1]$ кесіндісінде берілген Дирихле функциясын қарастырайық:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал сан болса,} \\ 0, & \text{егер } x \text{ иррационал сан болса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясы $[0, 1]$ кесіндісінде шектелген, алайда ол интегралданбайды. Шынында, егер $[0, 1]$ кесіндісін кез келген $[x_{i-1}, x_i]$ бөліктерге бөлгенде, егер ξ_i рационал сан болса,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1.$$

Ал ξ_i иррационал сан болса,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Сондықтан $\lambda \to 0$ ұмтылғанда $\lim_{n\to\infty} \sigma$ шегі жоқ.
Сонымен, шектелген $f(x)$ функциясының анықталған интегралы бар болуы үшін оның шектелгендігінен басқа қосымша шарт орындалуы қажет.

Дарбудың жоғарғы және төменгі қосындылары
Осы мақсатпен $[a, b]$ кесіндісін $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ бөліктерге бөлеміз де, белгілеулер енгіземіз:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \lambda = \max_i \Delta x_i,$$

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Екі қосынды түземіз:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i. \tag{10}$$

S – Дарбудың жоғарғы, s – Дарбудың төменгі қосындысы. Дарбу қосындылары мен интегралдық қосындының арасында қатыс бар:

$$s \leq \sigma \leq S. \tag{11}$$

Дарбу қосындыларының қасиеттері:

1. $[a, b]$ кесіндісінің бөлу нүктелеріне жаңа бөлу нүктелерін қосқаннан кейін Дарбудың жоғарғы қосындысы өспейді, төменгі қосындысы кемімейді.
2. Дарбудың әрбір төменгі қосындысы аралықты басқаша бөлудегі жоғарғы қосындысынан артпайды.

Theorem (Анықталған интегралдың бар болуының қажетті және жеткілікті шарты)

$[a, b]$ кесіндісінде шектелген $f(x)$ функциясының интегралдануы үшін

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \tag{12}$$

шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

Theorem

Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол функция интегралданады.

Доказательство.

$f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болғандықтан, Кантор теоремасы бойынша ол осы кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз.
Айталық, кез келген $\varepsilon > 0$ саны берілсін. $f(x)$ бірқалыпты үзіліссіз болғандықтан, оң $\frac{\varepsilon}{b-a}$ саны үшін $\delta > 0$ табылып, $[a, b]$ кесіндісін $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i < \delta$ етіп бөлгенде, функция тербелісі ω_i әрбір $\Delta x_i < \delta$ бөлігінде

$$\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

теңсіздігін қанағаттандырады. Онда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Демек, анықталған интеграл бар. Теорема дәлелденді. □

Theorem

Егер $[a, b]$ кесіндісінде шектелген $f(x)$ функциясының бірінші текті үзіліс нүктелерінің саны шекті болса, онда функция осы кесіндіде интегралданады.

Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] жұмыстардан қарауға болады.

Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т.
Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 1-том. – 562 б.

Жәутіков О.А.
Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 832 б.

Темірғалиев Н.Т.
Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1987. – 1-том. – 288 б.

Темірғалиев Н.Т.
Математикалық анализ. – Алматы: Ана тілі, 1991. – 2-том. – 400 б.

Ильин В.А., Позняк Э.Г.
Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 1. – 616 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г.
Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 2. – 448 с.

Зорич В.А.
Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012. – Т. 1. – 702 с.

Кудрявцев Л.Д.
Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1981. – Том 1. – 687 с.

Фихтенгольц Г.М.
Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 1. – 680 с.

Фихтенгольц Г.М.
Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 2. – 802 с.

Демидович Б.П.
Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.

Берман Г.Н.
Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.

Кудрявцев Л.Д.
Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – Том 1. – 400 с.

Сатығулова С., Искакова А.Қ., Айтжанов С.Е.
Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б.

НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА

РАҚМЕТ!